Etude d'une fonction

Partie I

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$ entier et que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Nous noterons C_f la courbe représentative de f.

1. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?
2. Qu'en déduisez-vous au sujet de C_f ?
3. Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « équivaut à », « est négligeable devant », « est dominée par » :
   $f(t)$ ..... e^t lorsque t tend vers $+\infty$.
   $f(t)$ ..... e^t/t lorsque t tend vers $+\infty$.
   $f(t)$ ..... e^t/t^2 lorsque t tend vers $+\infty$.
   Lorsque plusieurs choix sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre choix.
4. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
5. Explicitez $f'(t)$.
6. Dressez le tableau des variations de f.
7. Explicitez $f''(t)$.
8. Montrez que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α. Vous ne chercherez pas à calculer α.
9. Prouvez l'encadrement $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.
10. Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez la tangente au point d'abscisse 1 ainsi que l'allure de la courbe C_f au voisinage de ce point.

Partie II

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$ nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

« Il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)\mathrm{e}^t}{(1+t^2)^{n+1}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

11. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$; vous dresserez un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.
12. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Etablissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez l'expression de $P_{n+1}(t)$ en fonction de $P_n(t)$ et $P_n'(t)$.

Il résulte donc des questions 11 et 12 que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. Précisez le degré de la fonction polynomiale P_n.
14. Donnez une expression simple de $c_n = P_n(i)$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Partie III

Notons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Ainsi F est la primitive de f qui s'annule en 0.

15. Quel est le sens de variation de F ?
16. Montrez que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez par à expliciter cette limite.
17. Prouvez l'encadrement $-1 \leq \ell \leq 0$.
18. Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons

$$J(x) = \int_1^x \frac{t\mathrm{e}^t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,\ K(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\mathrm{d}t \text{ et } L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^4}\mathrm{d}t.$$

19. Prouvez l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.
20. Pour $x \geq 1$, placez les uns par rapport aux autres les réels $0, J(x)$ et $K(x)$.
21. Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
22. En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $\left[1, x^{3/4}\right] \cup \left[x^{3/4}, x\right]$, montrez que $L(x)$ est négligeable devant $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
23. Déduisez-en un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
24. Exploitez les résultats des questions 15, 17,18 et 23 pour donner l'allure de la courbe représentative de F.